(1) (a) (i) neplatí, stačí zvolit např. $f(x) = x^3$

(ii) platí, zvolme $a \in \mathbb{R}$. Protože je f nerostoucí, platí pro $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$,

a tedy i $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$.

(kdyby $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c > 0$, potom by existovalo $\delta > 0$, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{c}{2} > 0$ pro $x \in P(a,\delta)$)

(iii) platí, nechť f je rostoucí na $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$.

Potom pro každé $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x) < f(a)$, a tedy a není bodem lokálního minima.

Stejně tak pro každé $x \in (a, a+\delta)$ je $f(x) > f(a)$, a tedy a není bodem lokálního maxima.

Celkově tedy není a bodem lokálního extrému.

(iv) neplatí, stačí zvolit $f(x) = 0$.

(2) (b) (i) platí, stačí si uvědomit, že

$$\left(f(x) = o(g(x)),\ x\to a \right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta) : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq 1 \right)$$

$$\Rightarrow \left(f(x) = O(g(x)),\ x\to a \right)$$

(ii) neplatí, stačí zvolit $f(x)=g(x)=1$, $a\in\mathbb{R}$ libovolné

(iii) platí, je-li $|f(x)| \leq C|g(x)|$ $x\in P(a,\delta)$, potom

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq (C+1)|g(x)| \quad x\in P(a,\delta)$$

(iv) neplatí, stačí zvolit $f(x)=0$, $g(x)=1$

(v) platí, protože $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ a f a g jsou spojité v a,

musí platit $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$. Potom ale

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(x))^2}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\cdot 0 = 0$$

(vi) platí, protože f je spojitá v a, platí, že existují $C>0$ a $\delta^*>0$, že $|f(x)| \leq C$ $x \in U(a,\delta^*)$.

Nechť $|f(x)| \leq D \cdot |g(x)|$ $x \in P(a,\delta^{**})$,

potom pro $\delta = \min(\delta^*, \delta^{**}) > 0$ platí:

$$|(f(x))^2| \leq |f(x)| \cdot D \cdot |g(x)| \leq C \cdot D \cdot |g(x)| \quad x \in P(a,\delta),$$

což nám stačí.

(vii) neplatí, stačí zvolit $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$. Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$ a tedy neplatí $f(x) = O(g(x))$, $x \to 0$.

(viii) platí, ze spojitosti f a g v -7 existují $\delta^*>0, \delta^{**}>0$, že $|f(x)| \leq 8$ $x \in P(-7,\delta^*)$ a

$$|g(x)| \geq 6 \quad x \in P(-7,\delta^{**}).$$

Potom pro $\delta = \min(\delta^*, \delta^{**}) > 0$ platí

$$|f(x)| \leq 8 \leq \frac{8}{6}|g(x)| \quad x \in P(-7,\delta).$$

(3) (d) platil, že existuje $C \in \mathbb{R}$, že $G(x) = F(x) + C$, $x \in \mathbb{R}$

Potom $G(x) - G(1) = F(x) + C - (F(1) + C) = F(x) - F(1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Tedy
$$\frac{\sin^{366}(F(x)-F(1))}{\sin^{366}(G(x)-G(1))} + \frac{\cos^{366}(F(x)-F(1))}{\cos^{366}(G(x)-G(1))} = 2,$$

kdykoliv má levá strana smysl.

Na druhou stranu $f(x) > 2$, $x \in \mathbb{R}$, a tedy rovnice nemá řešení.